

ERHALTUNGSGRÖSSEN UND EFFEKTIVES POTENTIAL

Erhaltungsgrößen sind bei der Analyse physikalischer Systeme extrem hilfreich. Je mehr Erhaltungsgrößen es gibt, desto mehr sind die möglichen Bahnen festgelegt.

[H12] Bahnen in Zentralkräften **[5 + 3 + 5 + 5 + 3 = 21 Punkte]**

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie im Keplerproblem die Erhaltungssätze genutzt werden können, um die möglichen Bahnformen zu klassifizieren. Hier wollen wir den umgekehrten Weg gehen und von einer gegebenen Bahn auf die Zentralkraft schließen, in der sich das Teilchen bewegt. Ähnlich wie beim Keplerproblem sei die Bahnkurve als eine Funktion $r(\varphi)$ gegeben. Das zweite Newtonsche Gesetz nimmt für eine Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$ die Form $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ an. Wir setzen $u = 1/r$.

- (a) Drücken Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{du}{d\varphi}$ und $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ durch Ableitungen von r nach der Zeit aus. Verwenden Sie dabei $r^2\dot{\varphi} = L/m = \text{const}$, also Drehimpulserhaltung. Wenn Sie richtig gerechnet haben, können Sie den Betrag der Zentralkraft nun folgendermaßen schreiben:

$$f(r) = -\frac{L^2}{m} u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right)$$

- (b) Zur Überprüfung dieses Resultates überlegen Sie, warum zulässige Bahnen im Keplerproblem die Gleichung $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{const} > 0$ erfüllen müssen. Prüfen Sie nach, dass $u = \frac{1}{k} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$ eine Lösung ist.

Nun kommen wir zur eigentlichen Problemstellung. Angenommen, die Zentralkraft erlaubt eine kreisförmige Bahn, die durch das Kraftzentrum führt.

- (c) Zeigen Sie, dass eine kreisförmige Bahn mit Durchmesser D , die durch den Ursprung (das Kraftzentrum) führt, in den Variablen u und φ durch $u(\varphi) = \frac{1}{D} \sec \varphi$ gegeben ist. Wenn Sie die Secansfunktion nicht kennen, schlagen Sie sie nach. Erstellen Sie dazu eine Skizze.
 (d) Differenzieren Sie die in (c) diskutierte Bahn $u(\varphi)$ zweimal nach φ und jonglieren Sie ein wenig mit trigonometrischen Identitäten, um zu dem Ergebnis $\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 2D^2 u^3 - u$ zu gelangen.
 (e) Bestimmen Sie damit die zugehörige Zentralkraft $f(r)$. Sie sollten eine Abhängigkeit $\sim r^{-5}$ finden.

[H13] Wiederkehrender Komet

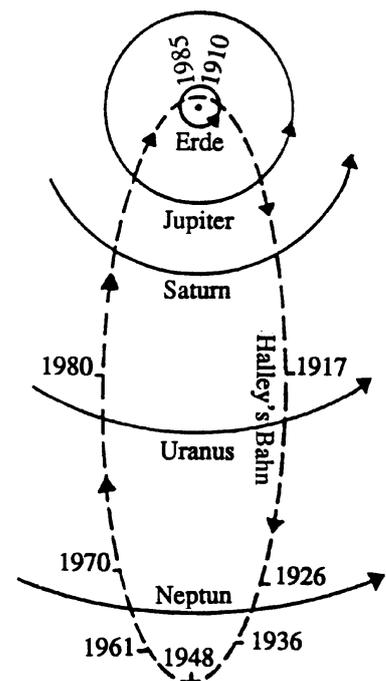
[12 + 3 = 15 Punkte]

Ein Komet der Masse m spüre ausschließlich die Gravitationskraft der Sonne (idealisiert punktförmig mit Masse M und ruhend). Es seien der kürzeste Komet-Sonne-Abstand r_0 sowie der längste, r_1 , bekannt (Perihel und Aphel).

- (a) Folgern Sie aus Drehimpuls- und Energieerhaltung die Geschwindigkeit v_0 am sonnennächsten Punkt und v_1 am fernsten Punkt. Berechnen Sie auch den kleinsten Krümmungsradius ρ der Bahn.
 (b) Welche Werte für v_0 , v_1 , ρ ergeben sich mit $r_0 = 0.5 \text{ AE}$ und $r_1 = 35 \text{ AE}$? Hierbei ist $1 \text{ AE} = 15 \cdot 10^7 \text{ km}$, und $GM = 39 (\text{AE})^3 / (\text{Jahr})^2$.

Das Bild gibt eine Skizze für die Bahn des Halleyschen Kometen. Unter dem Titel „Komet Halley’s lange Reise durch unser Sonnensystem“ brachte die Hannoversche Allgemeine Zeitung (HAZ) am 16.11.1985 einen Artikel mit dem Bild und seinen Daten, um auf die Wiederkehr des Kometen aufmerksam zu machen. Der Komet war damals mit Fernglas am Nachthimmel auszumachen.

Anfang 1997 war dafür der Komet Hale-Bopp mit bloßem Auge spektakulär deutlich zu sehen, ein extrem beeindruckendes Himmelsereignis. Während Halley alle 75 Jahre wiederkehrt, dauert es bei Hale-Bopp ein bisschen länger. Seine Bahn ist noch sehr viel extremer in die Länge gezogen, wir werden ihn erst im Jahre 4385 wieder sehen. Vorletztes Jahr konnte man überraschend den frisch entdeckten Komet C/2020 F3 NEOWISE mit bloßem Auge ganz gut sehen. Bei NEOWISE dauert es noch länger bis zu seiner Wiederkehr. Wir werden ihn frühestens in ca. 6700 Jahren wieder sehen.



[!] Ausführung

[6 Punkte]

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!